**МОЯ ЛУЧШАЯ МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА**

**ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ - КАК РЕШИТЬ НА ЕГЭ**

Руководитель методического объединения учителей математики Надеждинского района Приморского края Пентяшкина Татьяна Петровна,

учитель математики Скорикова Елена Николаевна

1. Введение

Анализ результатов сдачи ЕГЭ выпускниками школ позволяет сделать следующие выводы: у значительной части слабо развиты математические навыки - умение считать, решать текстовые и геометрические задачи [1]. Основным направлением улучшения подготовки обучающихся можно считать трансляцию эффективных педагогических практик, раскрытие интеллектуального и творческого потенциала учащихся, их индивидуальных способностей, интересов и возможностей. Важны и мотивация к обучению, понятность изложения учебного материала.

Замечен рост интереса к техническим и научным знаниям. Значительное улучшение результатов сдачи экзаменов стал федеральный проект для Дальнего Востока, организованный в 2024 - 2025 учебном году Академией Минпросвещения России и издательством «Просвещение» под руководством Самсонова Павла Ивановича. Участником этого проекта являлись авторы данной разработки, получены сертификаты о прохождении курса.

2. Тема методической разработки

Актуальностью проблемы низкого количества решённых задач ЕГЭ по стереометрии вызван интерес к данной теме. Разработан урок по теме «Тела вращения» (глава 2 по учебнику 11 класса «Геометрия», углубленный уровень, под редакцией В. Е. Подольского [2]).

Данная методическая разработка поможет улучшить усвоение материала по теме “Тела вращения”, поможет на практике понять их свойства, улучшить пространственное представление о видах различных сечений тел вращения плоскостями, под разными углами, с использованием пластилиновых и графических моделей. На уроке используются навыки по предмету “Черчение” для выполнения проекций тел с целью подробного анализа положения и размеров сечений тел.

В ходе проведения урока используются традиционные и современные методики обучения: обьяснительно - иллюстрационное обучение, проблемно-поисковое, с использованием обучающих диалогов и графических приложений, с использованием интеграции метапредметных связей (математика, черчение, компьютерная графика).

3. Цели урока

Образовательной целью урока является формирование чётких представлений о телах вращения: цилиндре, конусе, шаре. их образовании, развёртках, о понятии поверхность тела и как вычислить площадь поверхности; развитие пространственного мышления и воображения.

Воспитательная цель - мотивация к изучению математики, формирование аккуратности и внимательности при выполнении чертежей к задачам и их решении.

Развивающая цель - развитие умений анализировать и обобщать знания, совершенствовать навыки самостоятельной работы.

Для получения учебных навыков решаются три задачи - от простых к сложной. Две задачи выбраны из учебника, третья - из варианта №73 открытого банка заданий ФИПИ [3].

4. Оборудование для урока

Для урока понадобятся: пластилин для лепки тел вращения, пластмассовые палочки для нанесения сечений, подложки на столы, салфетки для очищения рук и рабочего места, а также – компьютер с электронной доской. Используются чертёжные инструменты, наглядные деревянные модели тел вращения (цилиндр, конус, шар) в наборах количестве 18 штук (рис. 1) , учебник по геометрии 11 класса; подвижные графические картинки с раширением “.gif” и фрагмент урока собственной разработки в графической программе “Блендер”.

Предварительно подготовлены обучающие видео платформы Российской электронной школы [4], файлы с расширением «.gif» из интернета в свободном доступе, наглядно показывающих образование тел путём вращения геометрических фигур: треугольника (конус), прямоугольной трапеции (усечённый конус), прямоугольника (цилиндр), окружности (тор) и развёртывания тел вращения на составные поверхности: круги, прямоугольники, секторы круга.

Рис. 1. Набор деревянных моделей геометрических тел.

5. План и ход урока

Тип урока: комплексного применения знаний. Тема уже была изучена с учителем другой школы, необходимо было обобщить, закрепить знания, убрать пробелы, развить пространственное воображение у учащихся, доказать, что решить задачи по стереометрии можно и браться за них на экзамене стоит.

Процесс урока подразделяют на пять взаимосвязанных этапов:

1) организационный - приветствие, объявление темы урока, цели (2 мин);

2) актуализации знаний по теме урока, показ части обучающего видео по телам вращения (5 мин);

3) практическая часть (15 мин);

4) закрепление знаний и навыков решением задач (15 мин);

5) подведение итогов, выдача домашнего задания, рефлексия (3 мин).

На первом этапе объясняем, что математики Приморского края делятся опытом обучения между собой, посещают уроки друг друга, делятся опытом, новыми решениями проблем обучения. Выбран 11 класс школы Надеждинского района, где преподаёт руководитель методического объединения математиков данного района Приморского края. Объявляется тема урока: «Тела вращения».

На втором этапе проводится актуализация знаний о геометрических телах и фигурах, их свойствах путём опроса, рассмотрение их сечений под разными углами в практическом задании, закрепление знаний в решении задач. Обращаем внимание на лежащие модели и приспособления на столах.

Вопросы классу:

- чем отличаются тела вращения от других тел? (ось симметрии, показываем на теле человека);

- что такое образующая тел вращения?

- чем отличаются круг и окружность?

- чем отличаются шар и сфера?

- поверхность тела это что такое? (показываем на тело человека, потом на телах вращения, проводим аналогию);

- как вычисляется длина окружности?

- как вычисляется площадь круга?

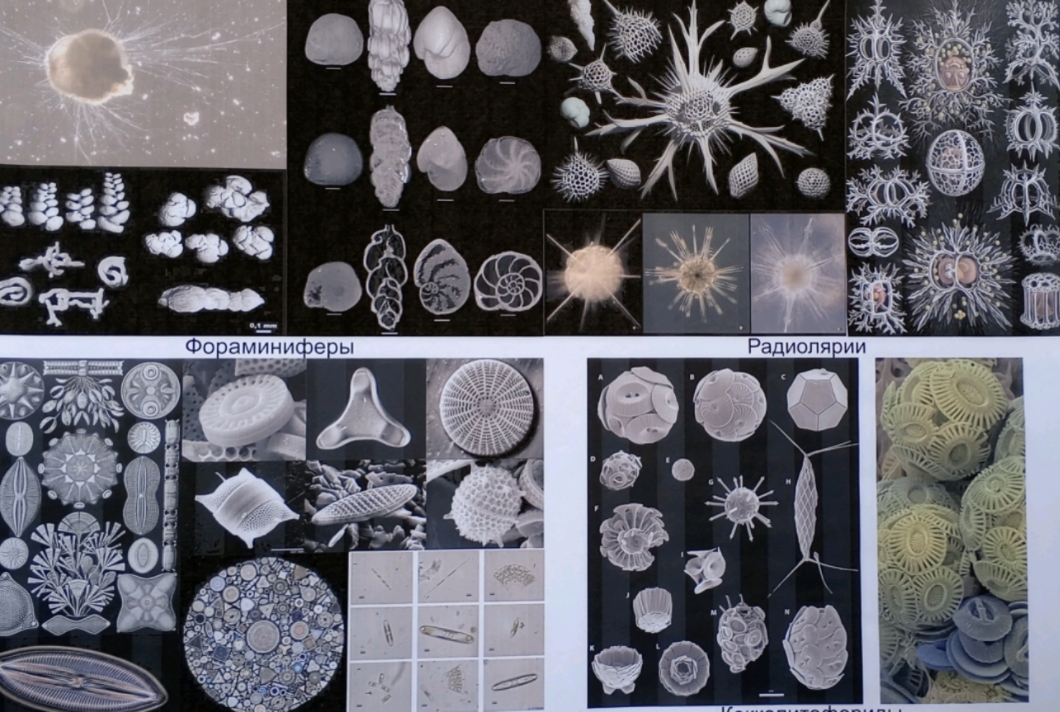
- как вычисляется площадь прямоугольника?

- как вычисляется площадь квадрата?

На третьем этапе показываем, где в нашей жизни встречаются геометрические фигуры и тела: на экране показываем грани кристаллов из музея имени К.В. Арсеньева, модели скелетов планктона ДВО РАН, институт геологии, которые мы посещали с учащимися школы (рис. 2, 3, 4).

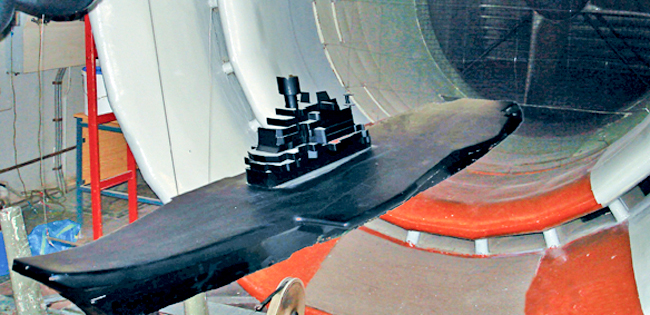
Рис. 2. Грани пирамиды на кристалле минерала.

Рис. 3. Тело вращения в ювелирном изделии царской коллекции.

Рис. 4. 3Д-модели скелетов планктона.

Акцентируем внимание учеников, какие тела вращения видим на снимках- цилиндры, конусы, эллипсоиды и их сочетания в сложных моделях.

Приступаем к практической части: созданию пластилиновых моделей и их сечение под разными углами. Объясняем ученикам, что модели выполняются при создании кузовов автомобилей, самолётов, ракет, кораблей и во взрослой жизни. Когда изобретателю или конструктору приходит в уме идея, её сначала надо воплотить в малом масштабе, проверить на обтекаемость, гармоничность конструкции, потом увеличить масштаб, проверить прочность и многие характеристики на специальном оборудовании. Обтекаемость автомобилей и самолётов проверяется в аэродинамических трубах (рис. 5).

Рис. 5. Модель корабля в аэродинамической трубе.

Одна часть класса лепит цилиндр, режут его пластиковым ножом по оси симметрии, видят в сечении прямоугольник. Потом рассекают цилиндр дальше от оси, получают прямоугольник меньшего размера. А ближе к образующей, понимают, что это будет отрезок.

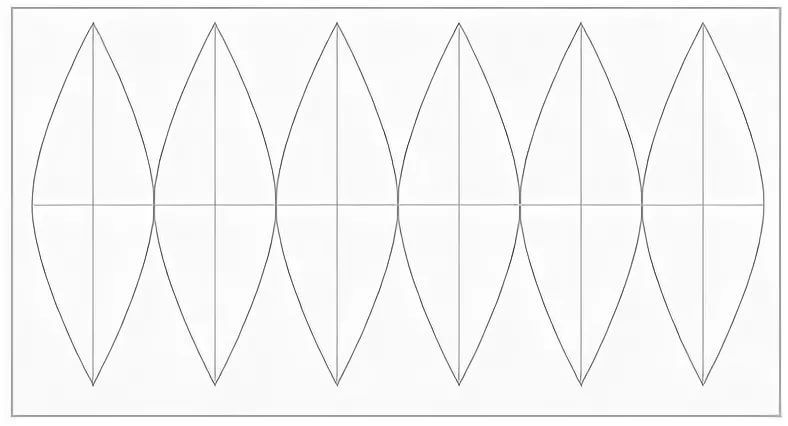
Затем рассекают цилиндр под разными углами, видят в плоскости сечения эллипсы (овалы), разного размера. В сечениях, параллельных основанию цилиндра, видят круги одинакового размера.

Такую же последовательность разрезов выполняет с пластилиновым конусом другая часть класса. Получают в осевом сечении треугольник, дальше, параллельно оси, получают в сечении часть параболы, ограниченную линией основания конуса. В угловом сечении видят эллипсы. В сечениях, параллельных основанию конуса, видят круги, уменьшающиеся к вершине. Потом видят, что у вершины круг уменьшится до точки.

Третья группа класса лепит шар и рассекает его под разными углами. В сечении видят круги разного размера, форма сечения не меняется.

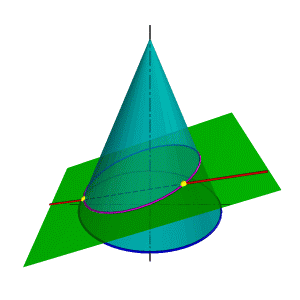
В коллективном труде ученики показывают свои результаты друг другу, сравнивают, запоминают.

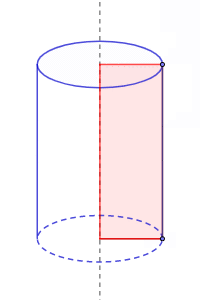
Затем кладут свои тела вращения на листы, обводят основания - окружности у конуса и цилиндра. Отмечают на окружности и в основаниях тела точки и вращают тело по листу, пока точка основания не коснётся листа. Вершину конуса надо придерживать неподвижно. Получают чертёж развёрток, с некоторой точностью: юбка с окружностью - у конуса, прямоугольник с двумя окружностями у цилиндра. Те, у кого был шар выразят недоумение: шар не положить на лист. Поясняем на доске, что развёрткой шара будет цепь фигур, похожих на дольки апельсина (рис. 6), и чем их больше, тем точнее развёртка, самостоятельно заметил один из учеников, вызвав интерес у остальных.

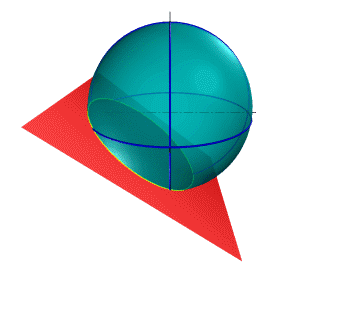
Рис. 6. Развёртка шара.

Подводим итог: то, что сделано своими руками, запомнится навсегда. Усвоено, как выглядят сечения тел вращения.

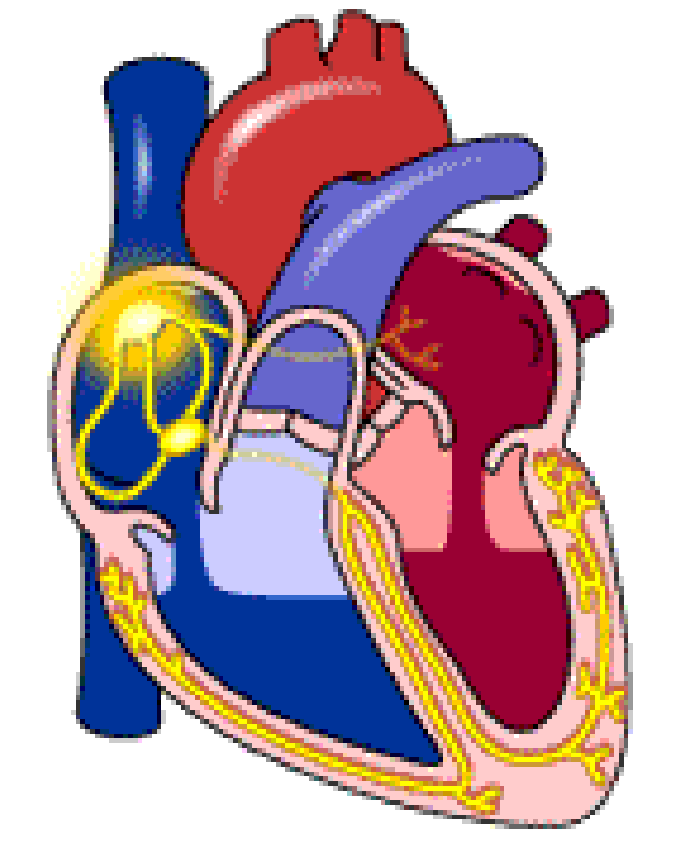
Закрепляем навыки и полученные представления на показе тел вращения и развёрток в гифках (рис. 7, 8, 9).

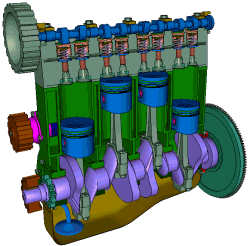
Рис. 7. Сечение конуса.gif.

Рис. 8. Сечение цилиндра.gif.

Рис. 9. Сечение шара.gif.

Показываем подвижные , графические модели работы двигателя внутреннего сгорания и человеческого сердца (рис. 10, 11). Задаёмся вопросом: почему двигатель человека может работать около 100 лет без ремонта, а автомобильный двигатель не может? Ответ прост: в органических деталях меньше трения, нет взрывов большой силы и взрывоопасных жидкостей. Вызываем интерес, мотивацию к познанию мира и к профессии инженера-конструктора, механика, графического дизайнера.

Рис. 10. Работа человеческого сердца.gif.

Рис. 11. Работа двигателя внутреннего сгорания.gif.

Заключительной частью этого этапа урока становится показ фрагмента видео о различных сечениях тел в трёхмерном представлении с помощью компьютерной графики (программа «Блендер») [5] .

6. Решение задач

Переходим к четвёртому, важному этапу урока. Знания освежили, практические представления о телах вращения и их различных сечениях получили и закрепили, переходим к решению стереометрических задач.

1). Задача из учебника №7.1, стр. 76.

Прямоугольник со сторонами 1 см и 3 см вращают вокруг большей стороны. Найдите:

- диагональ осевого сечения образовавшегося цилиндра;

- площадь полной поверхности этого цилиндра.

Решение:

а). На доске создаём чертёж, как на рис. 8. Выносим фигуру сечения на отдельное место (рис. 12). Получаем прямоугольник со сторонами: основание а=1+1 (радиусы окружности основания цилиндра); а=2. Высота цилиндра равна большей стороне, в=3. Диагональ делит прямоугольник на два равных, прямоугольных треугольника (признак равенства - по трём сторонам), значит, по теореме Пифагора находим диагональ х = √(а2 + в2).

х = √13.

Ответ: √13

в

а

Рис. 12. Вынесенное осевое сечение в виде прямоугольника.

б). Площадь поверхности образующегося цилиндра равна сумме площадей двух оснований (верхнего и нижнего) и боковой поверхности, разворачиваемой в прямоугольник.

S = 2תr2 + 2תr\*h ; S = 8ת см2

2). Задача из учебника №7.2, стр. 76.

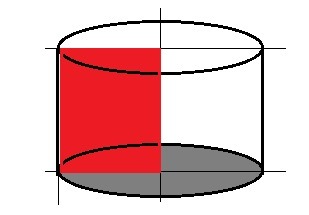
Квадрат со стороной 8 см вращают вокруг одной из его сторон. Найдите:

- площадь осевого сечения образовавшегося цилиндра;

- площадь полной поверхности этого цилиндра.

Решение:

Создаём чертёж в аксонометрической проекции, вспоминаем уроки черчения (рис. 13).

Рис. 13. Квадрат вращается вокруг одной из сторон.

а).Так как, у квадрата все стороны равны, то две его стороны при вращении образуют диаметр основания цилиндра, равным 16. Осевое сечение имеет форму прямоугольника со сторонами 8 и 16 см. Площадь прямоугольника равна произведению его сторон, следовательно, она равна 8\*16=128 см2.

б). Площадь поверхности образующегося цилиндра равна сумме площадей двух оснований (верхнего и нижнего) и боковой поверхности, разворачиваемой в прямоугольник.

S = 2תr2 + 2תr\*h ; S = 256ת см2

3). Задача по стереометрии №3B8999 из банка ФИПИ, вариант 73.

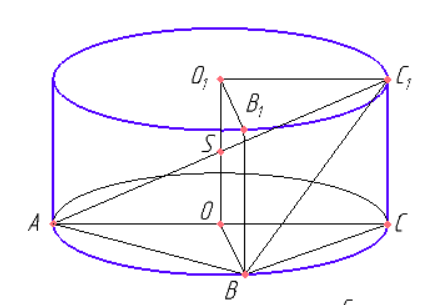
В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания.  
На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки Аи В, а на окружности другого основания точки В1 и С1, причём, ВВ1 -  образующая цилиндра, а отрезок АС1 пересекает ось цилиндра.

а). Докажите, что угол АВС1 — прямой.

б). Найдите расстояние от точки В до прямой АС1, если АВ=21, ВВ1=12, В1С1=16.

Решение:

Создаём чертёж в аксонометрической проекции (рис. 14). Здесь нам пригодятся навыки уроков черчения, без них задачу трудно решить.

Рис. 14. Цилиндр в аксонометрической проекции.

Надо попробовать создать разные варианты чертежа. Самый простой и понятный получается, если точки А и С расположить на диаметре нижнего основания. Точку В произвольно выбираем на окружности основания. На верхнем основании точки располагаются по образующей и обозначаются теми же буквами, но с индексом 1. Вынесем нижнее основание на отдельный чертёж (рис. 15).

С≡С1

А≡А1

В≡В1

21

16

Рис. 15. Горизонтальная проекция цилиндра.

И сразу становится видно, угол АВС1 - прямой, так как проекцией его стороны АС1 является АС, а вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90 градусов, что и требовалось доказать в первой части задания.

Вторая часть задачи: ищем расстояние от точки В до прямой АС1.

Построим фронтальную проекцию цилиндра (рис. 16):

С1

12

Н

А

С

В

Рис. 16. Фронтальная проекция цилиндра.

ВН - это кратчайшее расстояние от точки В до прямой АС1, то есть, является перпендикуляром к АС1. Угол АВС1 — прямой, следовательно, высота из прямого угла в прямоугольном треугольнике находится из отношения сторон подобных треугольников, значит, определяется по формуле:

ВН=(АВ\*ВС1)/АС1

В прямоугольном треугольнике СС1В сторона ВС1=ВС и по условию равна 16, а СС1 равна ВВ1=12. По теореме Пифагора находим ВС1:

ВС1 = √(162 +122) = 20

В прямоугольном треугольнике АВС сторона АС1 по теореме Пифагора равна:

АС1 = √(АВ2  + ВС12) = √(441 + 400) = 29

Теперь находим ВН:

ВН = (21\*20)/29, то есть, 420/29.

Ответ: 420/29.

7. Подведение итогов урока

На решение третьей задачи может не хватить времени. Задаём дома дорешать задачу. Самый трудный этап задачи решён в классе. Обращаем внимание, как освоению темы помогла практическая работа с пластилином, наглядные картинки с графикой и навыки выполнения проекций на тела чертеже (метапредметные связи).

За урок у доски были два ученика и ученица. Парни справились на отлично. Поскольку, оценок не в своей школе я ставить нельзя, ученикам выданы шоколадные медальки. Они очень удивились☺.

Уходя, на доске предлагается отметить мелом + или - урока (понравился или нет урок). Можно заменить нарисованными смайликами. Этот класс не стал заморачиваться рефлексией, были задумчивы, даже ошарашены☺. Если урок заставил задуматься - высший класс!

Вывод делаем такой: решить задачи по стереометрии на ЕГЭ можно, если есть знания, умения и навыки. Учимся, ребята!

Список литературы

1. Электронный ресурс. Статистико-аналитический отчет ГАУ ПКИРО Приморского края, результаты ГИА-11, 2025 год https://pkiro.ru/wp-content/uploads/SAO-2025/EGE/SAO-11.pdf
2. Учебник «Геометрия», 11 класс, углубленный уровень. А.Г. Мерзляк и др. М., «Просвещение», 2023.
3. Электронный ресурс. Открытый банк заданий ЕГЭ, математика, профильный уровень:

https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=AC437B34557F88EA4115D2F374B0A07B

1. Электронный ресурс. Российская Электронная Школа. <https://resh.edu.ru/subject/lesson/6300/main/22494/>
2. Электронный ресурс. Разработка Скориковой Елены Николаевны : видео-методика применения программы Блендер на уроках стереометрии. <https://vkvideo.ru/video635285988_456239228>